

Sprawozdanie z wykonanego ćwiczenia nr 412			
Temat:	<b>Wyznaczanie stężenia roztworu cukru za pomocą polarymetru półcieniowego</b>		
Imię i nazwisko:	Marcin Otorowski		
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Mechatroniki		Semestr I	Rok I
Zespół:	Data wykonania ćwiczenia:	Ocena:	Podpis:
28	21.10.2009		

### Opis teoretyczny

---



---



---



---



---



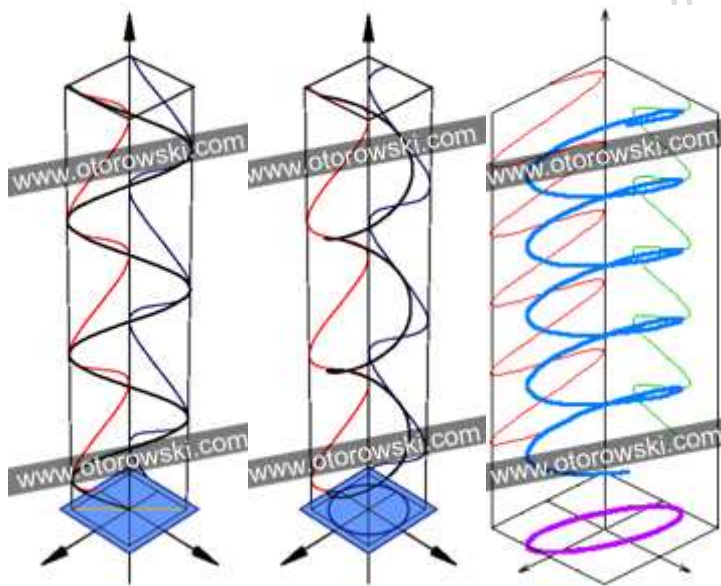
---



---



---




---



---



---



---



---



---



---



---

----- (-----).  
-----, ----- (-----), ----- (-----).  
-----), -----, -----.  
----- (-----).

-----,  
-----, ----- (-----).  
-----).

-----,  
-----,  
-----,  
-----,  
-----,  
-----,  
-----.

-----,  
-----, ----- (-----).  
-----,

-----:  
-----

$$\alpha = |\alpha_0|dc$$

- $|\alpha_0|$  -----
- $d$  -----
- $c$  -----

www.otorowski.com

## Doświadczenie

W celu wyznaczenia zdolności skręcającej wodnego roztworu cukru o znanym stężeniu  $c$  oraz wodnego roztworu cukru o nieznanym stężeniu  $c_x$  przeprowadzono doświadczenie, w którym zestaw pomiarowy składał się z:

- Polarymetru półcieniowego
- Kolbki miarowej o długości  $d = 20\text{cm} \pm 0,4\text{cm}$
- Menzurki z przedziałką o dokładności do  $0,1\text{cm}^3$
- Wagi
- Zlewki
- Wody destylowanej
- Cukru

Do rurki w polarymetrze wiano wodę destylowaną. Następnie przeprowadzono serię 5 pomiarów kąta skręcenia, dobierając takie ustawienie, w którym subiektywnie zanika granica pomiędzy obszarem jasnym a ciemnym. Następnie sporządzono roztwór cukru o stężeniu  $0,1\text{g}/\text{cm}^3$ , dobrze wymieszano i przelano do rurki w polarymetrze. Badanie kąta skręcenia dla takiego roztworu przeprowadzono pięciokrotnie. Następnie przyrządzono roztwór o nieznanym stężeniu, i również zbadano pięciokrotnie kąt skręcenia płaszczyzny. Wyniki przedstawiono w tabeli (zaparafowana tabela dołączona do sprawozdania):

Tabela 1: Wyniki pomiarów

i	woda destylowana			roztwór o znanym stężeniu			roztwór o nieznanym stężeniu		
	$a_1$	$\bar{a}_1$	$u(\bar{a}_1)$	$a_2$	$\bar{a}_2$	$u(\bar{a}_2)$	$a_x$	$\bar{a}_x$	$u(\bar{a}_x)$
1	0,40	0,380	0,020	12,40	12,480	0,02550	6,70	6,75	0,0274
2	0,35			12,50			6,85		
3	0,45			12,50			6,70		
4	0,35			12,45			6,75		
5	0,35			12,55			6,75		

Źródło: badanie i obliczenia własne

Ze względu na jednakową niepewność pomiaru w każdej z serii, kąt skręcenia płaszczyzny dla każdej z serii obliczono jako zwykłą średnią arytmetyczną pięciu pomiarów kąta. Niepewności standardowe pomiaru kąta skręcenia płaszczyzny obliczono jako niepewności standardowe typu A ze wzoru:

$$u(\alpha_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{(\bar{\alpha}_{jk} - \bar{\alpha}_j)^2}{n(n-1)}}$$

### Część I: Wyznaczenie kąta skręcenia właściwego

Korzystając z wyników pomiarów dla wody destylowanej i dla roztworu o znanym stężeniu, wyznaczono kąt skręcenia, równy różnicy wskazań kątów dla roztworu o znanym stężeniu oraz dla wody destylowanej. Kąt skręcenia dla roztworu wyniósł  $12,1^\circ$ . Następnie, wyznaczono zdolność skręcającą właściwą ze wzoru:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{dc}$$

Gdzie  $d$  to długość rurki, a  $c$  to znane stężenie roztworu. Wyniki obliczeń przedstawia poniższa tabela:

**Tabela 2: Wyniki obliczeń dla roztworu o znanym stężeniu**

Kąt skręcenia [°]	12,1	Niepewność wyznaczonego kąta skręcenia [°]	0,032404
Długość rurki [cm]	20	Niepewność długości rurki [cm]	0,163299
Objętość roztworu [cm <sup>3</sup> ]	25	Niepewność wyznaczenia objętości [cm <sup>3</sup> ]	0,677003
Masa cukru w roztworze [g]	2,5	Niepewność wyznaczenia masy [g]	0,005774
Stężenie roztworu [g/cm <sup>3</sup> ]	0,1	Niepewność wyznaczonego stężenia [g/cm <sup>3</sup> ]	0,002718
Zdolność skręcająca właściwa [ $\frac{1^\circ}{dm \cdot \frac{g}{cm^3}}$ ]	60,5	Niepewność wyznaczonej zdolności skręcania [ $\frac{1^\circ}{dm \cdot \frac{g}{cm^3}}$ ]	1,724521

Źródło: obliczenia własne

Niepewność wyznaczonego kąta skręcenia otrzymano, podstawiając niepewności cząstkowe  $u(\alpha_1)$  i  $u(\alpha_2)$  do wzoru:

$$u(\alpha_0) = \sqrt{u^2(\alpha_1) + u^2(\alpha_2)}$$

Założono, że rzeczywiste wartości długości rurki mają rozkład zbliżony do rozkładu trójkątnego o maksymalnym odchyleniu równym podanej dokładności 0,4 cm. Po podzieleniu jej przez  $\sqrt{6}$  otrzymano niepewność standardową pomiaru  $u(d) = 0,163299$  [cm].

Na dokładność pomiaru objętości roztworu wpływ miały trzy rzeczy – deklarowana przez producenta dokładność  $\pm 0,5$  cm<sup>3</sup>, dokładność podziałki menzurki (1 cm<sup>3</sup>) oraz błąd ludzki (mała ilość cieczy i zjawiska, zachodzące między wodą a ściankami naczynia zwiększają błąd pomiaru). Ostrożnie założono, że błąd maksymalny wynikający z błędu ludzkiego nie powinien być większy niż 0,5 cm<sup>3</sup>, a rzeczywista wartość przyjmuje rozkład trójkątny. Korzystając ze wzoru na niepewność całkowitą, niepewność standardową pomiaru objętości cieczy obliczono jako:

$$u(V) = \sqrt{0,5^2 + \left(\frac{0,5}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx 0,677003 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Masę cukru zmierzono za pomocą wagi elektronicznej, pokazującej wynik w gramach, o dokładności do dwóch cyfr po przecinku. Założono, że rzeczywiste wartości masy przyjmują rozkład prostokątny o maksymalnym odchyleniu równym 0,01g. Stąd, niepewność pomiaru masy wyniosła  $u(m) = 0,005774$  [g].

Niepewność stężenia obliczono jako niepewność całkowitą złożoną. Zróżniczkowano funkcję  $c(m,V)$  po każdej ze zmiennych i otrzymano wzór na niepewność:

$$u(c) = \sqrt{\left[\frac{\delta u}{\delta m} u(m)\right]^2 + \left[\frac{\delta u}{\delta V} u(V)\right]^2} = \sqrt{\frac{1}{V^2} * u^2(m) + \frac{(-1)^2 * m^2}{V^4} u^2(V)} = \frac{\sqrt{u^2(m) + \frac{m^2}{V^2} * u^2(V)}}{V}$$

$$\approx 0,002718 \left[\frac{g}{cm^3}\right]$$

Niepewność wyniku zdolności skręcającej obliczono jako niepewność całkowitą złożoną, liczoną jako suma kwadratów iloczynów zróżniczkowanej funkcji  $\alpha_0(\alpha,d,c)$  po każdej ze zmiennych i mnożonej przez niepewność tej zmiennej:

$$\begin{aligned}
 u(\alpha_0) &= \sqrt{\left[\frac{\delta\alpha_0}{\delta\alpha}u(\alpha)\right]^2 + \left[\frac{\delta\alpha_0}{\delta d}u(d)\right]^2 + \left[\frac{\delta\alpha_0}{\delta c}u(c)\right]^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{dc}\right)^2 * u^2(\alpha) + \left(\frac{-\alpha}{d^2c}\right)^2 * u^2(d) + \left(\frac{-\alpha}{dc^2}\right)^2 * u^2(c)} \\
 &= \frac{\sqrt{u^2(\alpha) + \frac{\alpha^2 * u^2(d)}{d^2} + \frac{\alpha^2 * u^2(c)}{c^2}}}{dc} \approx 1,724521 \left[\frac{1^\circ}{dm * \frac{g}{cm^3}}\right]
 \end{aligned}$$

Ostatecznie, w wyniku doświadczenia ustalono, że zdolność skręcająca właściwa roztworu cukru wyniosła:

$$\alpha_0 = 60,5 \pm 1,7 \left[\frac{1^\circ}{dm * \frac{g}{cm^3}}\right]$$

## Część II: Wyznaczenie stężenia roztworu o nieznanym stężeniu

Po wyznaczeniu zdolności skręcającej roztworu cukru obliczono stężenie roztworu o nieznanym stężeniu. W celu zapewnienia porównywalności wyników, skorzystano z tych samych przyrządów, w szczególności z światła o tej samej długości fali. Do obliczenia stężenia skorzystano z przekształconego wzoru na zdolność skręcającą właściwą:

$$c_x = \frac{\alpha_x}{\alpha_2} * c_2$$

Gdzie  $\alpha_x = \bar{\alpha}_x - \bar{\alpha}_1$  oraz  $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1$ . Wartości  $\bar{\alpha}_x$ ,  $\bar{\alpha}_2$  i  $c_2$  wyznaczono z tabeli 1:

$$\bar{\alpha}_x = 6,75 [^\circ]$$

$$\bar{\alpha}_2 = 12,480 [^\circ]$$

$$c_2 = 0,1 [g/cm^3]$$

Po skorygowaniu każdego z kątów o kąt skręcenia płaszczyzny dla wody destylowanej  $\bar{\alpha}_1 = 0,380^\circ$  otrzymano:

$$c_x = \frac{6,75 - 0,380}{12,480 - 0,380} * 0,1 \approx 0,05264463 \left[\frac{g}{cm^3}\right]$$

Wartości obliczeń przedstawia poniższa tabela:

**Tabela 3: Wyniki obliczeń dla roztworu o nieznanym stężeniu**

Kąt skręcenia płaszczyzny [°]	6,370	Niepewność wyznaczenia kąta skręcenia [°]	0,03391165
Długość rurki [cm]	20	Niepewność długości rurki [cm]	0,163299316
Objętość roztworu [cm <sup>3</sup> ]	25	Niepewność wyznaczonej objętości roztworu [cm <sup>3</sup> ]	0,6770032
Stężenie roztworu [ $\frac{g}{cm^3}$ ]	0,052644628	Niepewność wyznaczonego stężenia [ $\frac{g}{cm^3}$ ]	0,001464788

Źródło: obliczenia własne

Niepewności pomiaru objętości cieczy  $u(V)$  oraz długości rurki  $u(d)$  wzięto z części I sprawozdania. Niepewność pomiaru kąta skręcenia płaszczyzny otrzymano w wyniku podstawienia danych do wzoru:

$$u(\alpha_0) = \sqrt{u^2(\alpha_1) + u^2(\alpha_x)} \approx 0,03391165$$

Niepewność wyznaczonego stężenia to niepewność złożona. Stężenie wyrażone jest jako funkcja  $c_x(\alpha_x, a_2, c_2)$ . Do jej wyznaczenia skorzystałem z wzoru:

$$\begin{aligned}
 u(c_x) &= \sqrt{\left[\frac{\delta c_x}{\delta \alpha_x} u(\alpha_x)\right]^2 + \left[\frac{\delta c_x}{\delta a_2} u(a_2)\right]^2 + \left[\frac{\delta c_x}{\delta c_2} u(c_2)\right]^2} \\
 &= \sqrt{\left[\frac{c_2}{a_2} * u(\alpha_x)\right]^2 + \left[\frac{-a_x c_2}{(a_2)^2} * u(a_2)\right]^2 + \left[\frac{a_x}{a_2} * u(c_2)\right]^2} \\
 &= \sqrt{\frac{[c_2 * u(\alpha_x)]^2 + \left[\frac{a_x c_2}{a_2} * u(a_2)\right]^2 + [a_x * u(c_2)]^2}{a_2}} \approx 0,001464788 \left[\frac{g}{cm^3}\right]
 \end{aligned}$$

Ostatecznie, można zapisać:

$$c_x = 0,0526 \pm 0,0015 \frac{g}{cm^3}$$

### Wyniki i interpretacja:

Z przeprowadzonego doświadczenia wynika, że zdolność skręcająca właściwa wodnego roztworu z cukrem wyniosła  $60,5 \pm 1,7 \left[\frac{1^\circ}{dm * cm^3}\right]$ . Oznacza to, że roztwór wody i cukru jest czynnie optyczny, gdyż jego zdolność skręcająca jest znacznie większa niż zdolność wody destylowanej. Wpływ na dokładność pomiaru tej wartości miało kilka czynników. Wśród nich należy wymienić niepewności pomiarów masy cukru i objętości cieczy (a co za tym idzie również i stężenia badanego roztworu, które wyniosło w badanym doświadczeniu  $0,1000 \pm 0,0027g$ . Błąd względny ukształtował się na poziomie 2,7%. Bardziej dokładne wyniki badania zdolności skręcenia właściwego roztworu można by uzyskać po wprowadzeniu dokładniejszych metod pomiaru newralgicznych wartości, a szczególnie najbardziej podatnej na błędy objętości cieczy (dokładniejsza menzurka, użycie pipety). Dokładność pomiaru masy była wystarczająca, choć pewien wpływ na niepewność pomiaru mógł mieć zwykły błąd człowieka (który w tym badaniu przyjęto na poziomie nie przekraczającym 0,02g). Dokładność urządzenia do pomiaru kąta była na tyle dokładna, że niepewność typu B zaniedbano (obliczono jedynie niepewność A). Względnie najprostszym sposobem zwiększenia dokładności ostatecznego wyniku byłoby zwiększenie liczby wykonywanych pomiarów (np. z 5 do 10 lub więcej). Pomiaru powinny być także przeprowadzane przez różne osoby, gdyż granica pomiędzy obszarem ciemnym i jasnym oraz moment zaniknięcia jest czysto subiektywny i zależy także od np. ostrości wzroku.

W drugiej części doświadczenia wyznaczono stężenie innego, nieznanego roztworu cukru. Skorzystano w nim z wyznaczonej wcześniej zdolności skręcającej właściwej oraz z wartości skręceń płaszczyzny dla tego roztworu. Otrzymano, że stężenie roztworu wyniosło  $0,0526 \pm 0,0015 \frac{g}{cm^3}$ . Błąd względny wynosi więc ok. 2,85%. Jest to wartość zgodna z oczekiwaniami, gdyż dla celów kontrolnych końcowego wyniku, roztwór o nieznanym stężeniu powstał poprzez orientacyjnie dwukrotne rozcieńczenie roztworu z ćwiczenia I. Porównanie stężeń (w pierwszym doświadczeniu  $0,1 \frac{g}{cm^3}$ , w drugim ok.  $0,053 \frac{g}{cm^3}$ ) oznacza, że doświadczenie zostało przeprowadzone prawidłowo. Wpływ poszczególnych czynników (błędy pomiarów objętości roztworu, niepewność długości rurki) jest taki sam, jak w ćwiczeniu 1. Na dokładność wyników wpływ miała również niepewność wyznaczonego kąta skręcenia właściwego roztworu, wyznaczona w ćwiczeniu 1.