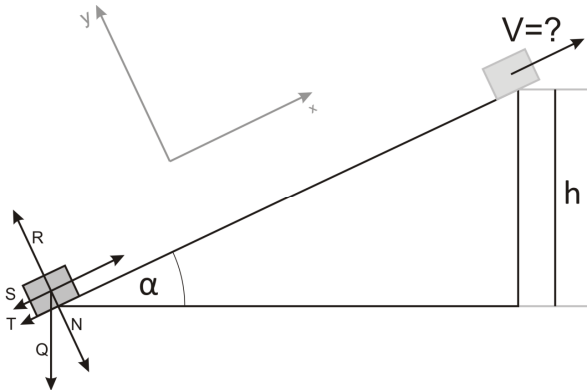


## Zadanie domowe z fizyki

Ciało o masie  $m$  pod działaniem siły  $F = 50 \text{ N}$  podnosi się wzdłuż równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  na  $h = 1 \text{ m}$ , współczynnik tarcia ciała o równię  $\mu = 0,2$ . Znaleźć prędkość końcową ciała i minimalną pracę jaką trzeba wykonać, aby ciało znalazło się na wysokości  $h$ .

### Rozwiązanie

Rysunek, przedstawiający działające siły wygląda następująco:



### Część I: Wyznaczenie prędkości końcowej

Przyjąłem układ osi X i Y jak na rysunku. Mamy dane:

- $F = 50 \text{ N}$
- $\mu = 0,2$
- $h = 1 \text{ m}$
- $\alpha, m$

Z rysunku można wywnioskować kilka zależności:

- $R = N$  (1)
- $S = Q \sin \alpha$  (2)
- $N = Q \cos \alpha$  (3)

Wiemy też, że:

- $T = \mu N$  (4)

Jeśli przyjmiemy, że na ciało działa pewna siła wypadkowa (rezultat działania sił  $F$ ,  $Q$  oraz reakcji), to jej składowa w osi Y będzie równa zero (ponieważ  $R$  i  $N$  się nawzajem równoważą), natomiast jej współrzędne w osi X będzie wyglądać następująco:

$$F_{WX} = -S - T + F$$

Podstawiając znane zależności 2-4 otrzymujemy:

$$F_{WX} = -Q \sin \alpha - \mu Q \cos \alpha + F$$

Ciężar ciała  $Q$  można zapisać jako  $Q = mg$ , a więc:

$$F_{WX} = F - mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Ponieważ masa, przyspieszenie, współczynnik tarcia oraz siła  $F$  są stałe, to siła wypadkowa również będzie stała, a to oznacza, że ciało będzie poruszać się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Ponieważ  $F = \text{const}$ , to wzór na pracę przyjmuje postać (rozpatruję jedynie oś X, na osi Y nie ma przemieszczenia = nie ma pracy):

$$W = F_{WX} * s$$

(pomiędzy wektorem przemieszczenia a wektorem siły wypadkowej jest kąt 0 stopni, a  $\cos 0 = 1$ )

Gdzie  $s$  to przebyta droga po równi do wysokości  $h$ . Z rysunku można odczytać, że  $s = h / \sin \alpha$ , a zatem:

$$\begin{aligned} W &= F_{WX} * h \sin \alpha = [F - mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] * \frac{h}{\sin \alpha} \\ &= \frac{Fh}{\sin \alpha} - mgh - \mu mgh * \text{ctg} \alpha \end{aligned}$$

W chwili  $t=0$  ciało znajduje się na wysokości 0 i ma prędkość 0. Energia potencjalna oraz kinetyczna w tym punkcie równają się zatem 0. W punkcie na wysokości  $h$  ciało posiada pewną energię potencjalną  $E_p=mgh$  oraz pewną energię kinetyczną  $\frac{mv^2}{2}$ . Zmiana pomiędzy energią końcową a początkową musi być równa wykonanej pracy (pomijamy energię wewnętrzną). Można zapisać zatem:

$$E_{p0} + E_{k0} + W = E_{p1} + E_{k1}$$

$$0 + 0 + W = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

$$W = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2(W - mgh)}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m} - 2gh} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{Fh}{\sin\alpha} - mgh - \mu mgh * ctg\alpha\right)}{m} - 2gh} \\ &= \sqrt{\frac{2Fh}{m\sin\alpha} - 2gh - 2\mu gh ctg\alpha - 2gh} \\ &= \sqrt{\frac{2Fh}{m\sin\alpha} - 2\mu gh * ctg\alpha - 4gh} \end{aligned}$$

Nie podstawiam liczb, bo nie znamy liczbowej wartości kąta  $\alpha$  ani masy  $m$ .

### Część II: Wyznaczenie minimalnej pracy:

Najmniejszą możliwą pracę wykonamy wówczas, gdy użyta siła będzie jak najmniejsza (bo na drogą nie mamy wpływu, warunek przebycia drogi na wysokość  $h$  musi być spełniony). Aby ciało pięło się w górę, w obranym układzie współrzędnych wartość siły  $F_{Wx}$  musi być nieujemna, a ruch ciała będzie wówczas jednostajny prostoliniowy. Można zatem zapisać:

$$W = W_{MIN} \Leftrightarrow F_W = 0 \Leftrightarrow F = F_{MIN} = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 0$$

Oczywiście, praca minimalna =  $F_{MIN} * s$ , czyli:

$$W_{MIN} = F_{MIN} * s = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) * \frac{h}{\sin\alpha} = mgh(1 + \mu ctg\alpha)$$

(pomiędzy wektorem przemieszczenia a wektorem siły wypadkowej jest kąt 0 stopni, a  $\cos 0=1$ )

### Odpowiedź:

Prędkość ciała na końcu równi równa będzie

$$v = \sqrt{\frac{2Fh}{m\sin\alpha} - 2\mu gh * ctg\alpha - 4gh}$$

Minimalna praca, jaką trzeba wykonać, by ciało znalazło się na wysokości  $h$  wynosi

$$W_{MIN} = mgh(1 + \mu ctg\alpha)$$

### Sprawdzenie jednostek:

$$[v] = \sqrt{\frac{N * m}{kg} - \frac{m^2}{s^2} - \frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{\frac{kg * m^2}{s^2 * kg} - \frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

$$[W_{MIN}] = kg * \frac{m}{s^2} * m = N * m = J$$

### Sprawdzenie na liczbach:

Jeśli założymy, że  $m = 1 \text{ kg}$  a  $\alpha = 30^\circ$ , a reszta danych jak w treści zadania to obliczone wartości będą równe:

$$v = \sqrt{\frac{2 * 50 * 1}{1 * \sin 30^\circ} - 2 * 0,2 * 9,81 * 1 * ctg 30^\circ - 4 * 9,81 * 1} = 12,41 \frac{m}{s}$$

$$W_{MIN} = 1 * 9,81 * 1(1 + 0,2 * ctg 30^\circ) = 13,21 J$$