Zadanie 1)

Dane są r-nia opisujące położenie punktu:

$$\begin{cases} x = 5asin^2\omega t \\ y = 4acos^2\omega t \end{cases}$$

Znaleźć: prędkość, przyspieszenie, promień krzywizny, tor ruchu, narysować tor ruchu.

Rozwiązanie:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 5a\omega cos\omega t * 2sin\omega t = 5a\omega sin2\omega t$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -4a\omega sin\omega t * 2cos\omega t = -4a\omega sin2\omega t$$

Ponieważ prędkość punktu to geometryczna suma prędkości rzutowanych na osie x i y to:

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2} = a\omega sin2\omega t\sqrt{25+16} = a\omega sin2\omega t\sqrt{41}$$

Przyspieszenie można wyznaczyć jako:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 5a\omega * 2\omega * cos2\omega t = 10a\omega^2 cos2\omega t$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -4a\omega * 2\omega * cos2\omega t = -8a\omega^2 cos2\omega t$$

I sumując geometrycznie:

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = a\omega^2 cos2\omega t\sqrt{64+100} = 2a\omega^2 cos2\omega t\sqrt{41}$$

Do wyznaczenia promienia krzywizny można skorzystać z zależności:

$$a^2 = a_S^2 + a_D^2$$

Gdzie a_S to przyspieszenie styczne a a_D to przyspieszenie dośrodkowe. Porównując powyższy wzór z wyznaczonym przyspieszeniem oraz wiedząc, że:

$$a_S = \frac{dV}{dt}$$

można zauważyć, że z lewej strony wartość a^2 jest identyczna jak wartości $a_S{}^2$ ze strony prawej. Stąd wniosek, że przyspieszenie dośrodkowe równa się zero. Jeżeli tak, to mamy do czynienia z ruchem po linii prostej – a mówiąc bardziej ogólnie – po okręgu o nieskończenie długim promieniu. Tym samym:

$$r \to \infty$$

Do wyznaczenia toru ruchu z obu równań na współrzędne trzeba wyrugować czas:

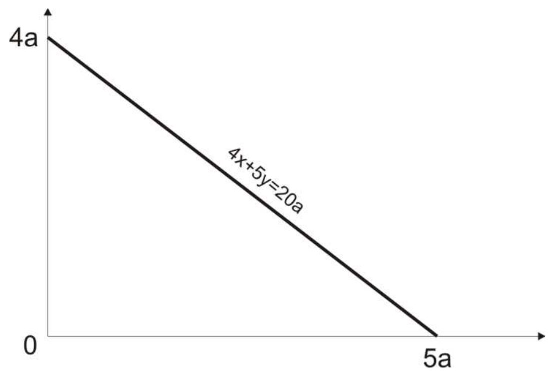
$$\frac{x}{5a} = sin^2\omega t$$

$$\frac{y}{4a} = cos^2\omega t$$

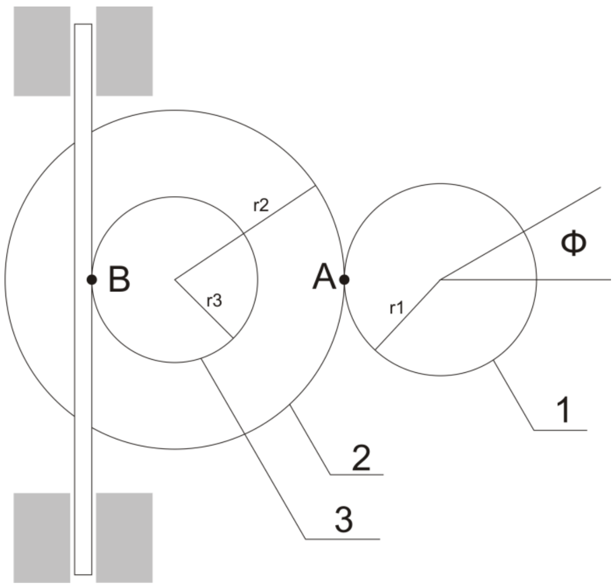
Po dodaniu stronami i zastosowaniu jedynki trygonometrycznej:

$$\frac{x}{5a} + \frac{y}{4a} = 1, \qquad 4x + 5y = 20a$$

Jest to równanie prostej (co dowodzi, że promień krzywizny jest nieskończenie długi). Prosta ta przecina oś OX w punkcie (5a,0) oraz oś OY w punkcie (0,4a). Tor ruchu wygląda następująco:



Zadanie 2)



Kąt Φ opisany jest zależnością: $\Phi=45t^2+15$. Promień r_1 wynosi 20, promień r_2 60, a promień r_3 10 cm. Wyznaczyć r-nie ruchu zębatki (tego pionowego klocka ☺).

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że punkt styku tarczy 1 i 2 oznaczymy jako punkt A, a punkt styku zębatki i tarczy 3 jako punkt B. Zadanie sprowadza się do tego, że szukamy prędkości w punkcie B (V_B) – jeśli wyznaczymy ją, to będzie można także określić r-nie drogi s.

Tarcza 1 porusza się z jednostajnym przyspieszeniem kątowym. Jej prędkość kątowa:

$$\omega_1 = \frac{V_A}{r_1}$$

Wyznaczamy V_A:

$$V_A = \omega_1 r_1$$

Ponieważ prędkość liniowa w punkcie styku tarcz 1 i 2 jest taka sama, to można wyznaczyć znając V_A prędkość kątową drugiej tarczy:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}$$

Prędkość kątowa tarczy 2 i tarczy 3 jest taka sama:

$$\omega_2 = \omega_3$$

A znając ją, można wyznaczyć prędkość V_B:

$$V_A = \omega_3 r_3 = \omega_2 r_3 = \omega_1 \frac{r_1 r_3}{r_2}$$

I to jest r-nie prędkości wysuwającej się zębatki. Po wstawieniu danych i uwzględniu, że:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} = 90t$$

mamy:

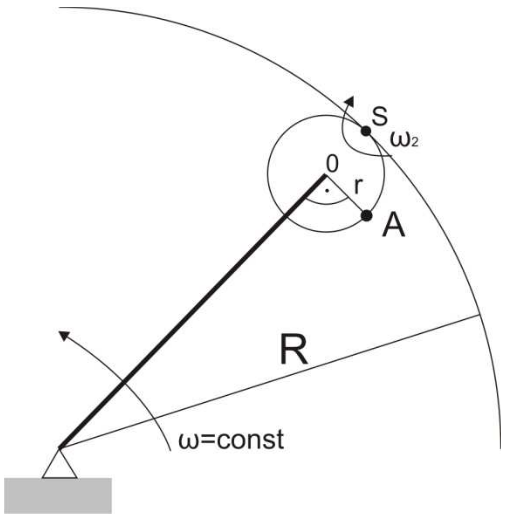
$$V = 90t * \frac{r_1 r_3}{r_2} = 90t * \frac{20 * 10}{60} = 300t$$

Aby wyznaczyć drogę, należy wiedzieć, że:

$$s = \int V dt = \int \omega_1 \frac{r_1 r_3}{r_2} dt = \frac{r_1 r_3}{r_2} \int \omega_1 \, dt = \frac{r_1 r_3}{r_2} * (45t^2 + 15)$$
$$= \frac{20 * 10}{60} * (45t^2 + 15) = 150t^2 + 50$$

Odpowiedź: Zębatka wysuwa się z prędkością 300t [cm/s] a jej drogę opisuje równanie $150t^2 + 50$ [cm]

Zadanie 3:



Pręt porusza się na przegubie. Do jego końca zamontowano tarczę, która obraca się tak jak na rysunku, tocząc się bez poślizgu po zewnętrznym okręgu. Wyznaczyć prędkość punktu A oraz przyspieszenie dośrodkowe.

Rozwiązanie:

Wprowadziłem pomocnicze oznaczenie w postaci punktu styku S oraz prędkości kątowej ω_2.

Punkt 0 porusza się z prędkością kątową ω po okręgu o promieniu R-r:

$$V_0 = \omega(R - r)$$

Rozpatrując ten ruch z punktu widzenia chwilowej osi obrotu wokół punktu S, można to zapisać również jako:

$$V_0 = \omega_2 r$$

Porównujemy oba wyrażenia, by otrzymać:

$$\omega_2 r = \omega(R - r)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega(R - r)}{r}$$

Ale patrząc dalej jako punkt S jako chwilową oś obrotu dochodzimy do wniosku, że punkt A porusza się z identyczną prędkością kątową ω_2. Różnica polega na tym, że promieniem wodzącym jest przekątna kwadratu o boku r, czyli:

$$r_A = r\sqrt{2}$$

Zatem:

$$V_A = \omega_2 * r\sqrt{2} = \omega(R - r)\sqrt{2}$$

Prędkość ta powinna być przyłożona wektorowo do punktu A, a jej kierunek powinien być prostopadły do odcinka AS.

Przyspieszenie dośrodkowe wyznaczmy ze wzoru:

$$a_D = \frac{{V_A}^2}{r} = \frac{2\omega^2(R - r)^2}{r}$$

Przyspieszenie styczne jest równe zero (we wzorze na V_A nic nie zależy od czasu). Oznacza to, że całkowite przyspieszenie równe jest przyspieszeni dośrodkowemu. Wektorowo, jest one przyłożone do punktu A a kierunke jest równoległy do odcinka AO.